Chapitre 15

Dimension d'un espace vectoriel

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Préliminaires

1.1 Espace de dimension finie

Définition 15.1 (Cardinal d'une famille)

Soit $\mathcal{F} = (a_i)_{i \in I}$ une famille indexée par un ensemble I.

- Si I est **fini**, on dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est finie. De plus, on appelle cardinal (ou taille) de la famille le nombre d'éléments de I, et on note ce nombre

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \operatorname{card}\left((a_i)_{i \in I}\right)$$

- Si I est infini, on dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est infinie.

Attention : le cardinal de $(a_i)_{i \in I}$ ne dépend pas des valeurs prises par a_i. Même s'ils sont tous égaux, chacun compte pour un élément de plus pour le cardinal.

Exemple 1. Le cardinal de la famille $(0, 0, 0)$ est ...

Exemple 2. Le cardinal de $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est ...

Exemple 3. La famille $(x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ est infinie.

Définition 15.2 (Dimension finie)

E est dit de dimension finie si E possède une famille génératrice finie. Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Être de dimension finie revient à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $E = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Attention, le n en question ne sera pas forcément la dimension de E (cf section suivante pour la définition précise).

1.2 Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite

Les deux théorèmes suivants sont admis : leur preuve est faisable si E est de dimension finie, mais en dimension infinie, cela nécessite l'axiome du choix.

Théorème 15.3 (Théorème de la base incomplète (admis))

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

En d'autres termes, si $\mathcal{L}$ est une famille libre, on peut trouver une sur-famille $\mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$) telle que $\mathcal{B}$ soit une base de E.

Théorème 15.4 (Théorème de la base extraite (admis))

De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

En d'autres termes, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, on peut trouver une sous-famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{B}$ soit une base de E.

1.3 Théorème de la dimension pour les e.v.

Théorème 15.5 (Théorème de la dimension pour les e.v.)

On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{G}, \mathcal{L}$ deux familles finies de E. On suppose que $\mathcal{G}$ est génératrice et que $\mathcal{L}$ est libre. Alors :

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}) \leq \operatorname{card}(\mathcal{G})$$

De manière équivalente, si $\mathcal{F}$ est une famille finie de E telle que $\operatorname{card}(\mathcal{F}) > \operatorname{card}(\mathcal{G})$, alors $\mathcal{F}$ est liée.

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$ une famille génératrice de E de cardinal $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde qu'il existe une famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ de cardinal $n > m$. Comme toute sous-famille d'une famille libre est encore libre, la famille $\mathcal{X} := (x_1, \dots, x_{m+1})$ est également libre.
Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_1 = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m$$

Si tous les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ étaient nuls, on aurait $x_1 = 0$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{X}$ soit libre. Donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$, et quitte à changer l'ordre de $\mathcal{G}$, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} g_m$$

Avec cette relation, toute combinaison linéaire de $g_1, \dots, g_m$ peut se réécrire comme une combinaison linéaire de $x_1, g_2, g_3, \dots, g_m$. Ainsi :

$$E = \operatorname{Vect}(g_1, g_2, \dots, g_m) = \operatorname{Vect}(x_1, g_2, \dots, g_m)$$

Procédons par récurrence pour montrer que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$:

$$E = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_k, g_{k+1}, \dots, g_m)$$

Cette assertion est vraie pour $k = 1$ par ce qui précède. Supposons que cette assertion soit vraie pour un $k \in [\![1, m-1]\!]$, et montrons qu'elle l'est encore au rang $k+1$.
Par hypothèse de récurrence, la famille $x_1, \dots, x_k, g_{k+1}, \dots, g_m$ est génératrice, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_{k+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} g_{k+1} + \dots + \alpha_m g_m$$

Si $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$, on aurait

$$x_{k+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$$

et donc x_{k+1} serait une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_k$, d'où $\mathcal{X}$ serait liée, ce qui est impossible par hypothèse.
Donc $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m) \neq 0$ et quitte à changer l'ordre de $\mathcal{G}$, on peut supposer $\alpha_{k+1} \neq 0$. Alors,

$$\alpha_{k+1} g_{k+1} = -\alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_k x_k + x_{k+1} - \alpha_{k+2} g_{k+2} - \dots - \alpha_m g_m$$

et en divisant par α_{k+1}, on trouve que g_{k+1} est une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m$. Avec un argument similaire à ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_k, g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m) \\ &= \operatorname{Vect}(x_1, \dots x_k, x_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_m) \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. En particulier, pour $k = m$, on obtient

$$E = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_m)$$

Comme x_{m+1} est un vecteur de E, on en déduit que $x_{m+1} \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_m)$, donc que la famille $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_{m+1})$ est liée. Contradiction. D'où le résultat. □

2 Dimension d'un e.v.

2.1 Définition et exemples

Théorème 15.6

Tout e.v. (de dimension finie ou non) possède des bases.
Si E est un e.v. de dimension finie, toutes ses bases ont le même cardinal : cet entier (positif) est appelé la dimension de E, et est noté $\dim E$.

Démonstration. La première assertion résulte du théorème de la base incomplète : il suffit de prendre une famille libre quelconque de l'e.v. (par exemple une famille réduite à un vecteur non nul) et de la compléter en une base. Cette preuve ne marche pas pour $\{0_E\}$, mais son cas est réglé par une convention (cf plus bas).

Montrons la deuxième assertion. Soit

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \qquad \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$$

deux bases de E. Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, par le théorème 15.5, on a

$$n = \operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq \operatorname{card}(\mathcal{B}') = p$$

et de même $p \leq n$ en utilisant que $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice. Ainsi $p = n$. Toutes les bases de E ont donc le même cardinal. La dimension de E est donc une notion bien définie. □

Exemple 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'e.v. $\mathbb{K}^n$ admet pour base (canonique)

$$\mathcal{B} = \Big(\quad (1,0,0,\dots,0), \quad (0,1,0,\dots,0), \quad (0,0,\dots,0,1) \quad \Big)$$

Ainsi, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$.

Exemple 5. $\mathbb{K}_n[X]$ admet pour base (canonique) la famille $(1, X \dots, X^n)$, donc $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et

$$\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = \qquad\qquad}$$

Exemple 6. Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-e.v., on a vu que $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$, donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
(Cette notation précise que c'est la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v. : c'est nécessaire car $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$)

Remarque. Par convention, la famille vide ( ) est libre et comme $\operatorname{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$, elle constitue une base de $\{0_E\}$. Ainsi, $\{0_E\}$ est de dimension finie et $\boxed{\dim\{0_E\} = 0}$. C'est le seul s.e.v. de E à être de dimension nulle.

Exemple 7. Pour tout $u \in E$, le s.e.v. $\mathbb{K}u := \operatorname{Vect}(u)$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$

Exemple 8. Pour tous $u, v \in E$ **non colinéaires**, le s.e.v. $\operatorname{Vect}(u, v)$ est de dimension finie égale à 2.

Définition 15.7

Un e.v. de dimension 1 est appelé une droite vectorielle (il peut s'écrire $\mathbb{K}u$ avec $u \neq 0$).
Un e.v. de dimension 2 est appelé un plan vectoriel.

2.2 Exemple important : dimension et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 15.8 (Symbole de Kronecker)

Soit $i, j \in \mathbb{N}$. On note

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\delta_{i,j}$ est appelé symbole de Kronecker.

Définition 15.9 (Matrice élémentaire)

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On se place sur l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note

$$E_{i,j} := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & & 0 & & & \mathbf{0} \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & & & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \text{ligne } i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{colonne } j & \end{array}$$

La matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice élémentaire.

Exemple 9. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, il y a 6 matrices élémentaires :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 15.10

Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires :

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{i,j}$$

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 15.11

Dans l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, $\dim\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ et $\dim\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) = n^2$.

Démonstration. Par la proposition 15.10, la famille $(E_{i,j})$ est génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ une famille de scalaires.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \lambda_{i,j}E_{i,j} = 0_{n,p} &\implies \begin{pmatrix}\lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,p}\end{pmatrix} = 0_{n,p}\\ &\implies \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!] \qquad \lambda_{i,j} = 0\end{aligned}$$

Donc la famille $(E_{i,j})$ est une base. D'où le résultat. □

2.3 Dimension de $E\times F$

Proposition 15.12

Si E, F sont de dimension finie, alors $E\times F$ aussi et

$$\dim(E\times F) = \dim E + \dim F$$

En particulier, $\dim(E_1\times\cdots\times E_p) = \sum_{i=1}^{p}\dim E_i$.

La preuve s'appuie sur le fait que si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E et si $(f_1,\ldots,f_p)$ est une base de F, alors la famille

$$\begin{matrix}(e_1,0) & (e_2,0) & \cdots & (e_n,0)\\ (0,f_1) & (0,f_2) & \cdots & (0,f_p)\end{matrix}$$

est une base de $E\times F$ (la preuve est simple et laissée en exercice).

2.4 Famille libre, famille génératrice et dimension

Théorème 15.13

On suppose que E est de dimension finie n. Alors :

1. Toute famille libre a au plus n éléments.
2. Toute famille libre avec n éléments est une base.
3. Toute famille génératrice a au moins n éléments.
4. Toute famille génératrice avec n éléments est une base.

Démonstration. Montrons 1 et 3. Soit $\mathcal{L},\mathcal{G},\mathcal{B}$ trois familles de E qui sont respectivement libre, génératrice et une base. Par le théorème 15.5, on a

$$\operatorname{card}(\mathcal{L}) \underbrace{\leq}_{\text{car } \mathcal{B} \text{ est génératrice}} \operatorname{card}(\mathcal{B}) \underbrace{\leq}_{\text{car } \mathcal{B} \text{ est libre}} \operatorname{card}(\mathcal{G})$$

et comme $\dim E = n$, on a $\text{card}(\mathcal{B}) = n$. D'où le résultat.

Montrons 2. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre à n éléments. Par le théorème de la base incomplète (théorème 15.3), il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. Or, comme $\dim E = n$, on a $\text{card}(\mathcal{B}) = n$. Comme $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ et que $\mathcal{L}, \mathcal{B}$ ont le même cardinal, on en déduit que $\mathcal{L} = \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{L}$ est une base.

L'assertion 4 se montre sur le même principe avec le théorème de la base extraite (théorème 15.4). $\square$

Exemple 10. Montrer que

$$\mathcal{F} = \Big((1,1,0), (1,0,1), (2,1,2)\Big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 11. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \Big((X-\alpha)^k\Big)_{0 \le k \le n}$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3 Dimension et s.e.v.

3.1 Dimension d'un s.e.v.

Théorème 15.14

On suppose E de dimension finie. Alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et

$$\dim F \le \dim E$$

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Démonstration. On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. En particulier, $\mathcal{B}_F$ est une famille libre (sur F comme sur E, le caractère libre ne dépend pas de l'e.v. qu'on considère). Comme c'est une famille libre dans E de dimension finie, par le théorème 15.13,

$$\dim F = \text{card}(\mathcal{B}_F) \le n = \dim E$$

Supposons maintenant que $\dim F = \dim E = n$. La famille $\mathcal{B}_F$ étant libre et ayant $\dim F = n$ éléments, c'est en particulier une base de E par le théorème 15.13. En particulier, $\mathcal{B}_F$ engendre E. Ainsi, $E = \text{Vect}(\mathcal{B}_F) = F$. $\square$

Méthode

Pour montrer que deux e.v. de dimension finie sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.
Cela marche aussi avec deux s.e.v. de E : si F, G sont deux s.e.v. et que

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$$

alors $F = G$.

Exemple 12. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. suivants sont égaux :

$$F = \text{Vect}\left((1,2,-3),\,(-3,2,1)\right) \qquad G = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$$

3.2 Base adaptée à une décomposition

Proposition 15.15

On suppose que E est de dimension finie n.

1. Si F, G sont deux s.e.v. **supplémentaires** de bases respectives $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$, alors

   $$\mathcal{B} := (f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q) \qquad \text{est une base de } E.$$

   Les éléments de $\mathcal{B}$ étant tous dans F ou dans G, on dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.
2. Réciproquement, soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, les s.e.v.

   $$V := \text{Vect}(e_1,\dots,e_p) \qquad \text{et} \qquad V' := \text{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$$

   sont supplémentaires : $E = V \oplus V'$.
   De plus, la base $(e_1,\dots,e_n)$ est adaptée à la décomposition $E = V \oplus V'$.

Autrement dit, lorsqu'on dispose de deux s.e.v. supplémentaires dans E, on peut concaténer leurs bases pour former une base de E. Il est essentiel pour cela que les s.e.v. F,G soient supplémentaires.

Remarque temporaire (*À ignorer une fois que le Théorème 15.19 sera vu*) Le premier point de la Proposition 15.15 a une autre conséquence. $\mathcal{B}$ étant une base de E, on a $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim E$. Ainsi,

$$E = F \oplus G \quad \Longrightarrow \quad \dim E = \mathrm{card}(\mathcal{B}) = p+q \quad \Longrightarrow \quad \dim E = \dim F + \dim G$$

Corollaire 15.16 (Existence d'un supplémentaire)

Tout s.e.v. de E admet (au moins) un supplémentaire dans E.

Démonstration. La preuve n'est exigible que pour lorsque E est de dimension finie. On pose $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Soit V un s.e.v. de E. On considère $(f_1,\dots,f_p)$ une base de V. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1,\dots,f_p)$ en une base de E :

$$\mathcal{B} = (f_1,\dots,f_p,e_{p+1},\dots,e_n)$$

Alors, par la Proposition 15.15, l'ensemble $V' := \mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ est un supplémentaire de V dans E. □

3.3 Dimension et somme de s.e.v.

Proposition 15.17

On suppose E de dimension finie. Si F,G sont des s.e.v. de E en somme directe, alors ($F+G$ est de dimension finie et)

$$\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G$$

Remarque. Ce résultat est (sauf exception) faux si la somme n'est pas directe : par exemple, si $\dim F > 0$, on a $\dim(\underbrace{F+F}_{=F}) = \dim F \neq \dim F + \dim F$

Démonstration. Comme $F+G\subset E$, l'ensemble $F+G$ est clairement de dimension finie. On considère l'e.v. $\mathcal{E} := F+G$. On a clairement $F+G = \mathcal{E}$ et comme F,G sont en somme directe, on a $F\cap G = \{0\}$. Ainsi, F,G sont supplémentaires *dans* $\mathcal{E}$, càd $\mathcal{E} = F\oplus G$. Alors, par la Remarque temporaire plus haut, on en déduit que

$$\dim \mathcal{E} = \dim F + \dim G$$

d'où le résultat puisque $\mathcal{E} = F\oplus G$. □

Proposition 15.18 (Formule de Grassman)

On suppose E de **dimension finie**. Si F,G sont des s.e.v. de E alors ($F+G$ est de dimension finie et)

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$

Démonstration. Comme $F+G\subset E$, l'ensemble $F+G$ est clairement de dimension finie.

- L'ensemble $F \cap G$ est un s.e.v. de G, donc par le corollaire 15.16, il admet un supplémentaire S dans G, i.e.
$$G = (F \cap G) \oplus S \qquad \text{donc en particulier} \qquad (F \cap G) \cap S = \{0\}$$
- On considère l'e.v. $\mathcal{E} := F + G$. Montrons que $\mathcal{E} = F \oplus S$.
  - Tout d'abord, montrons que $F \cap S = \{0\}$. Comme $S \subset G$, on a $S = G \cap S$ donc
  $$F \cap S = F \cap (G \cap S) = (F \cap G) \cap S = \{0\}$$
  - Ensuite, montrons que $F + S = \mathcal{E}$. Il suffit de montrer l'inclusion de $\mathcal{E}$ dans $F + S$. Soit donc $x \in \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} = F + G$, on peut écrire
  $$x = x_F + x_G \qquad \text{avec} \quad (x_F, x_G) \in F \times G$$
  Or, $x_G \in G = (F \cap G) \oplus S$, donc
  $$x_G = x_{F \cap G} + x_S \qquad \text{avec} \qquad (x_{F \cap G}, x_S) \in (F \cap G) \times S$$
  Finalement
  $$x = \underbrace{x_F + x_{F \cap G}}_{\in F} + \underbrace{x_S}_{\in S} \in F + S$$
  D'où $\mathcal{E} \subset F + S$ par arbitraire sur x.
  - Finalement, $\mathcal{E} = F \oplus S$.
- Ainsi, par la Proposition 15.17, on a
$$G = (F \cap G) \oplus S \quad \Longrightarrow \quad \dim G = \dim(F \cap G) + \dim S$$
$$F + G = \mathcal{E} = F \oplus S \quad \Longrightarrow \quad \dim(F + G) = \dim F + \dim S$$
Finalement, $\dim S = \dim G - \dim(F \cap G)$, si bien que
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

□

Remarque. La formule de Grassman permet de retrouver la Proposition 15.17. En effet, F, G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$, càd si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$.

3.4 Dimension et s.e.v. supplémentaires

Théorème 15.19 (Caractérisations de "F, G sont supplémentaires")

On suppose E de **dimension finie**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G = E$
2. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
4. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

Autrement dit pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de vérifier deux assertions parmi :

- $F + G = E$
- $F \cap G = \{0\}$
- $\dim F + \dim G = \dim E$

et lorsque c'est le cas, la troisième assertion est également vérifiée.

Démonstration. L'équivalence entre 1 et 2 a été vue au chapitre précédent. □

L'équivalence entre 2, 3 et 4 découle de la formule de Grassman :

$$\underbrace{\dim(F+G)}_{a} = \underbrace{\dim F + \dim G}_{b} - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{c}$$

$$a = b - c$$

- La condition $F + G = E$ équivaut à $a = \dim E$.
- La condition $\dim F + \dim G = \dim E$ équivaut à $b = \dim E$.
- La condition $F \cap G = \{0\}$ équivaut à $c = 0$.

Donc, si deux de ces conditions sont vraies, et puisque $a = b - c$, alors la troisième est vraie aussi.

Remarque. Il est souvent difficile de montrer que $E = F + G$. Ainsi, pour montrer que deux s.e.v. sont supplémentaires, on montre fréquemment l'assertion 4 (mais cela ne marche qu'en dimension finie !)
En dimension infinie, on a seulement l'équivalence entre les assertions 1 et 2, comme vu au chapitre précédent.

Exemple 13. Montrer que les ensembles $A = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

4 Compléments : dimension infinie

Proposition 15.20

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est de dimension infinie.
2. Il existe une famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui est libre.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de n éléments de E qui est libre.

Remarque. On a le droit d'écrire "$\dim E$" uniquement si E est de dimension finie. Aucune formule où apparait "$\dim E$" (ou $\dim F, \dim G$) n'est valable si une de ces dimension est infinie.

Exemple. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie car $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre (et même une base) avec une infinité d'éléments.

Remarque. Toute famille libre infinie n'est pas nécessairement une base. Par exemple, $(X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre infinie mais ce n'est pas une base de $\mathbb{K}[X]$.
En particulier, $F = \mathrm{Vect}(X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un s.e.v. de dimension infinie de $\mathbb{K}[X]$ mais, bien que tous deux de dimension infinie, on a cependant $F \neq \mathbb{K}[X]$.